

# PROGRESIONES

Una sucesión numérica es un conjunto ordenado de números, cada uno de los cuales recibe el nombre de término. Para designar cada término se utiliza la notación  $a_i$ , donde el subíndice indica el lugar que ocupa el término.

Se llama término general o término  $n$ -ésimo de una sucesión al término que ocupa el lugar  $n$  de la misma; se designa por  $a_n$  y para definir una sucesión, la mayoría de las veces, lo haremos estableciendo la relación que existe entre el valor del término  $a_n$  y el lugar que ocupa dicho término,  $n$ .

### Ejemplo

La sucesión 2, 6, 12, 20, 30, 42,... es una sucesión de infinitos términos que está definida por la relación  $a_n = n^2 + n$ , como podemos comprobar.

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2, \quad a_2 = 2^2 + 2 = 6, \quad a_3 = 3^2 + 3 = 12, \quad a_4 = 4^2 + 4 = 20, \dots$$

No siempre se define una sucesión mediante el establecimiento de una relación entre  $a_n$  y  $n$ ; otras veces, para definir una sucesión, utilizamos una fórmula de recurrencia que nos dice la relación que existe entre un término y sus precedentes.

### Ejemplo

Sea la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..... Una vez conocidos  $a_1=1$  y  $a_2=1$ , los términos siguientes se obtienen sumando los dos precedentes:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

Una sucesión numérica de números reales se dice que es una progresión aritmética si cada término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad constante que llamamos diferencia, representada por la letra  $d$ .

El término general de una progresión aritmética que tiene como primer término  $a_1$  y como diferencia  $d$  se obtiene mediante la fórmula:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

### Ejemplo

La sucesión 5, 7, 9, 11, 13, 15,... es una progresión aritmética de diferencia  $d=2$ , pues la resta de cada término con su anterior es igual a 2. Su término general será:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)2 = 3 + 2n$$

La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

*Ejemplo*

Si en la sucesión del ejemplo anterior, deseamos sumar los veinte primeros términos, hallaremos, en primer lugar, el valor de  $a_{20}$  para, posteriormente, hallar  $S_{20}$ .

$$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19 \cdot 2 = 43 \Rightarrow S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = \frac{(5 + 43)20}{2} = 480$$

Llamamos interpolar  $p$  medios diferenciales entre  $a$  y  $b$  a intercalar  $p$  números entre  $a$  y  $b$  de modo que formen una progresión aritmética, siendo  $a$  el primer término.

*Ejemplo*

Si deseamos interpolar cuatro medios diferenciales entre 3 y 28 tendremos en cuenta que, una vez hecha la interpolación, el número 3 ocupará el primer lugar y el número 28, el sexto. Esto nos permitirá obtener la diferencia de la progresión y los cuatro términos que buscamos.

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 28 = 3 + 5d \Rightarrow 5d = 25 \Rightarrow d = 5$$

Así, los términos buscados serán:

$$a_2 = 3 + 5 = 8, a_3 = 8 + 5 = 13, a_4 = 13 + 5 = 18, a_5 = 18 + 5 = 23$$

Decimos que una sucesión es una progresión geométrica si cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad constante que llamamos razón de la progresión y que designamos con la letra  $r$ .

El término general de una progresión geométrica que tiene como primer término  $a_1$  y como razón  $r$  se obtiene mediante la fórmula:  $a_n = a_1 r^{n-1}$

*Ejemplo*

La sucesión 2, 6, 18, 54, 162, ... es una progresión geométrica ya que cada término se obtiene multiplicando por 3 el anterior. Su término general será:

$$a_n = a_1 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

La suma y el producto de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica vienen dados por las fórmulas siguientes:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

*Ejemplo*

Para hallar la suma y el producto de los seis primeros términos de la progresión geométrica del ejemplo anterior calcularemos en primer lugar  $a_6$  para, a continuación, calcular  $S_6$  y  $P_6$ .

$$a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 = 486$$

$$S_6 = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{486 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 728 \quad , \quad P_6 = \sqrt{(a_1 a_6)^6} \Rightarrow P_6 = \sqrt{(2 \cdot 486)^6} = 918330048$$

Cuando en una progresión geométrica la razón es positiva pero menor que 1, diremos que es una progresión geométrica decreciente, y la suma de todos sus términos es finita, y puede hallarse mediante la siguiente fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

*Ejemplo*

La progresión 2, 2/3, 2/9, 2/27, 2/81,... es una progresión geométrica decreciente de razón 1/3 y la suma de sus infinitos términos será:

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

Se llama interpolar  $p$  medios proporcionales entre  $a$  y  $b$  a construir una progresión geométrica intercalando  $p$  términos entre  $a$  y  $b$ , siendo el primer término  $a$ .

*Ejemplo*

Si queremos interpolar cuatro medios proporcionales entre 3 y 3072, tendremos en cuenta que, una vez hecha la interpolación el primer término será 3 y el sexto 3072. Este hecho nos permitirá calcular la razón de la progresión y, con ella, los cuatro medios proporcionales.

$$a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow 3072 = 3 r^5 \Rightarrow r^5 = 1024 \Rightarrow r = \sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$$

Si la razón es 4, los medios serán:

$$a_2 = 3 \cdot 4 = 12, a_3 = 12 \cdot 4 = 48, a_4 = 48 \cdot 4 = 192, a_5 = 192 \cdot 4 = 768$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

1.- ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión 3, 7, 11, 15, 19, ... para obtener como resultado 406?

*Solución:* la sucesión que nos dan es una progresión aritmética de diferencia 4 y supongamos que, para conseguir esa suma, necesitamos  $n$  términos, desde  $a_1$  hasta  $a_n$ . Aplicando la fórmula de la suma de términos de una progresión aritmética tenemos:

$$406 = \frac{(3 + a_n)n}{2} \quad \text{y como } a_n = 3 + (n-1)4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1, \text{ se cumple:}$$

$$406 = \frac{(3 + 4n - 1)n}{2} \Rightarrow 406 = \frac{2(1 + 2n)n}{2} \Rightarrow 406 = (1 + 2n)n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^2 + n - 406 = 0 \Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3248}}{4} = \frac{-1 \pm 57}{4}$$

De aquí deducimos que  $n$  puede tomar los valores 14 y  $-29/2$ . Como este último valor no es válido pues la solución debe ser entera, concluimos que se deben sumar 14 términos.

2.- La suma de tres números que están en progresión aritmética es 27 y su producto 585. Calcula dichos números.

*Solución:* si llamamos  $x$  al término central, los otros dos serán  $x-d$ ,  $x$ ,  $x+d$ , donde  $d$  es la diferencia de la progresión. De acuerdo con esto, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} (x-d) + x + (x+d) = 27 \\ (x-d)x(x+d) = 585 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9-d)9(9+d) = 585 \Rightarrow 81 - d^2 = 65 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4.$$

Los números que buscamos son 5, 9 y 13.

3.- ¿Cuánto vale la suma de 9 términos de una progresión aritmética si  $a_5 = 14$ ?

*Solución:* el término  $a_5$  es el término central de los nueve primeros términos de la progresión y verifica que es igual a  $\frac{a_1 + a_9}{2}$ . Como  $S_9 = \frac{(a_1 + a_9)9}{2}$ , se cumple:

$$S_9 = 14 \cdot 9 = 126$$

4.- En una progresión geométrica, el término  $a_4 = 3$  y la diferencia entre el tercer término y el segundo es  $-18$ . Escribe los seis primeros términos de dicha progresión geométrica.

*Solución:* planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $a_1$  y  $r$ .

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = 3 \\ a_3 - a_2 = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 r^3 = 3 \\ a_1 r^2 - a_1 r = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 r^3 = 3 \\ a_1 r(r-1) = -18 \end{array} \right\}$$

Dividimos miembro a miembro:

$$\frac{a_1 r^3}{a_1 r(r-1)} = \frac{3}{-18} \Rightarrow \frac{r^2}{r-1} = -\frac{1}{6} \Rightarrow 6r^2 = -r+1 \Rightarrow 6r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } r_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = a_1 r_1^3 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4}{r_1^3} = \frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 3 \cdot 3^3 = 3^4 = 81 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  La progresión es:  $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$

$$\text{Para } r_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_4 = a_1 r_2^3 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4}{r_2^3} = \frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -3 \cdot 2^3 = -24 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  La progresión es:  $-24, 12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$

5.- Halla la suma de todos los términos de una progresión geométrica sabiendo que  $a_2 = 5$  y  $r = 1/4$ .

*Solución:* al ser la razón positiva y menor que uno, la progresión es decreciente.

Calcularemos, en primer lugar,  $a_1$  y después la suma de los infinitos términos.

$$a_2 = a_1 r \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{5}{\frac{1}{4}} = 5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{\frac{3}{4}} = \frac{80}{3}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:

a)  $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$

c)  $\frac{2}{2}, \frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{17}{20}, \dots$

b)  $\frac{4}{1}, \frac{8}{4}, \frac{12}{7}, \frac{16}{10}, \dots$

d)  $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{11}, \frac{7}{18}, \dots$

2.- Los dos primeros términos de una sucesión son 1 y 2. Los demás se forman, por recurrencia, sumando los dos que les anteceden. Escribe los ocho primeros términos de esta sucesión.

3.- Halla el término general de las progresiones aritméticas siguientes:

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

b) 13, 10, 7, 4, 1, -2, ...

c) -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, ...

4.- Halla el término general de las progresiones aritméticas definidas por

a)  $a_1 = 3$  y  $d = -2$

b)  $a_1 = 4$  y  $d = 8$

c)  $a_1 = 7$  y  $d = 5$

5.- Comprueba si la sucesión  $\frac{n^2 - 1}{n}, n, \frac{n^2 + 1}{n}, \frac{n^2 + 2}{n}$  constituye una progresión aritmética.

6.- Halla el término que ocupa el lugar 100 en la progresión 12, 19, 26, 33, ...

7.- En una progresión aritmética  $a_6 = 10$  y  $a_8 = 16$ . Calcula el primer término.

8.- Halla los ocho primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el décimo es 60 y la diferencia es 6.

9.- Los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética de diferencia  $10^\circ$ . Hállalos.

10.- Los ángulos de un pentágono convexo están en progresión aritmética y el menor de ellos mide  $60^\circ$ . Halla el valor de los restantes ángulos.

11.- Calcula el término que ocupa el lugar 10 en la progresión:  $-5, -13/3, -11/3, -3, \dots$

12.- El primer término de una sucesión es 11 y cada uno de los restantes se obtiene sumando al anterior la cifra de las unidades. ¿Se trata de una progresión aritmética?

- 13.- Justifica razonadamente a qué es igual la suma de dos términos que equidistan de los extremos en una progresión aritmética.
- 14.- Halla tres números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 33, y la suma de sus cuadrados es 381.
- 15.- Calcula el valor de  $a$  para que los números  $4a+5$ ,  $15a+1$ ,  $a+22$  formen una progresión aritmética.
- 16.- Halla la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 300.
- 17.- Halla la suma de todos los múltiplos de 4 mayores que 30 y menores que 200.
- 18.- Halla la suma de todos los números de dos cifras.
- 19.- El primer término de una progresión aritmética es 5, la diferencia es 3 y la suma de los  $n$  primeros términos es 75. Calcula  $n$ .
- 20.- La suma de los 8 términos de una progresión aritmética es 216 y el producto de los términos extremos es 585. Halla la diferencia de la progresión y dichos términos extremos.
- 21.- Si consideramos siete términos consecutivos de una progresión aritmética, el cuarto vale 33. Halla la suma de los siete términos.
- 22.- En una progresión aritmética de cinco términos, el tercero vale 25 y la diferencia entre los extremos es 32. ¿Cuál es la progresión?
- 23.- El último término de una progresión aritmética de 20 términos es 102 y la suma de los términos es 1090. Halla el primer término y la diferencia de la progresión.
- 24.- La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es 8 y la suma de los tres primeros es 18. Halla el quinto término de la progresión.
- 25.- En una arboleda hay 63 filas de árboles. Cada fila tiene 3 árboles más que la anterior. La fila 17 tiene 58 árboles. ¿Cuántos árboles hay en total?
- 26.- En una progresión aritmética el término que ocupa el lugar undécimo es el doble del séptimo término, y la diferencia es 0'5. Halla los once términos de la progresión.
- 27.- Calcula los seis términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los tres primeros es 51 y la suma de los tres últimos es 123.

- 28.- La suma de tres números en progresión aritmética es 24 y su producto es 440. Halla dichos números.
- 29.- Calcula tres números que están en progresión aritmética y son tales que aumentados en 5, 4 y 7, respectivamente, son proporcionales a 5, 6 y 9.
- 30.- Se suman, término a término, dos progresiones aritméticas de primer término  $a_1$  y  $b_1$ , y diferencia  $d$  y  $d'$ , respectivamente. La sucesión resultante ¿es una progresión aritmética? ¿Cuál es su primer término? ¿Y su diferencia?
- 31.- Interpola cuatro medios diferenciales entre 9 y 39.
- 32.- Interpola ocho medios diferenciales entre 3 y 21.
- 33.- En una progresión geométrica de razón  $-3/4$  el término quinto es  $9/64$ . Halla el primer término.
- 34.- ¿Para qué valores de  $x$  las expresiones  $x+1, 4x-2, 10x+4$ , forman una progresión geométrica?
- 35.- La suma de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 26, y su producto 216. Halla los tres números.
- 36.- Deduce razonadamente a quién es igual el producto de dos términos que equidistan de los extremos en una progresión geométrica.
- 37.- La diferencia entre el tercero y el primer término de una progresión geométrica es 9 y el segundo término vale 6. Halla la progresión.
- 38.- Halla los cinco primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es 80 y el tercero es 20.
- 39.- El producto de cinco términos consecutivos de una progresión geométrica es 32 y el quinto término es cuatro veces el tercero. Calcula la progresión.
- 40.- En una progresión geométrica de cuatro términos, el producto de los términos que ocupan lugar impar es 144 y el producto de los términos que ocupan lugar par es 2304. Halla los cuatro términos.
- 41.- Encuentra los cinco términos de una progresión geométrica sabiendo que la razón es igual a la décima parte del tercer término y que la suma del segundo y el quinto términos es 90.
- 42.- La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 65 y la suma de los seis primeros es 1820. Halla la progresión.



- 43.- Un mendigo pide hospitalidad a un avaro haciéndole la siguiente proposición: Yo pagaré 1 € por el primer día, 2 € por el segundo día, 3 € por el tercer día, y así sucesivamente. En cambio usted me dará 0'001€ el primer día, 0'002€ por el segundo día, 0'004€ por el tercer día, y así sucesivamente. El avaro encontró esta proposición como un buen negocio y consintió en este arreglo por 30 días. Liquididad la cuenta al final de este tiempo.
- 44.- Interpola dos medios proporcionales entre 8 y 125.
- 45.- Interpola siete medios proporcionales entre 5 y 1280.
- 46.- Determina una progresión geométrica tal que la suma de los dos primeros términos sea 8 y la diferencia entre el tercero y el primero sea 16.
- 47.- El inventor del ajedrez pidió como premio que le otorgaran un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente, poniendo en cada casilla doble que en la anterior. Calcula el número de granos que pidió.
- 48.- En una progresión geométrica la suma de sus infinitos términos es 2, y la diferencia entre los dos primeros es  $\frac{2}{9}$ . Halla el primer término y la razón.
- 49.- Halla el número de términos proporcionales que se pueden interpolar entre 4 y 128, siendo 2 la razón de la progresión.
- 50.- En una progresión geométrica la suma de sus infinitos términos es 32, y el segundo término es 8. Halla la progresión.
- 51.- Halla el primer término de una progresión geométrica sabiendo que su razón es  $r = \frac{1}{4}$  y la suma de todos sus términos es 8.
- 52.- (\*) Tres números están en progresión geométrica y suman 26. Si el primero se deja igual, al segundo se le añaden 3 unidades, y al tercero se le quitan 2 unidades, los números obtenidos están en progresión aritmética. Averigua dichos números.
- 53.- (\*) Se tienen tres términos consecutivos de una progresión geométrica que suman 28. Sumando dos unidades al término intermedio la progresión se convierte en aritmética. Averigua dichos números.
- 54.- Se tiene un cuadrado de lado 4 m. Uniendo los puntos medios de sus lados obtenemos otro cuadrado. Uniendo los puntos medios de los lados de este nuevo cuadrado, obtenemos otro cuadrado, y así sucesivamente. Halla la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.

- 55.- (\*) Tres números  $a_1, a_2, a_3$  están en progresión geométrica y suman 3. Si se escriben en el orden  $a_1, a_3, a_2$  entonces los números están en progresión aritmética. Determina dichos números.
- 56.- (\*) Tres números  $a_1, a_2, a_3$  están en progresión geométrica y suman 26. Si se suman 4 unidades al segundo, los nuevos números forman una progresión aritmética. Calcula dichos números.
- 57.- (\*) La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes están en progresión aritmética. Calcula dichos números.
- 58.- (\*) Se tiene un triángulo equilátero de lado 4 m. Se unen entre sí los puntos medios de sus lados, obteniéndose otro triángulo equilátero. Siguiendo así sucesivamente, ¿cuál será la suma de las áreas de los infinitos triángulos equiláteros obtenidos?
- 59.- Demostrar que si  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  son los términos de una progresión geométrica de razón  $r$ , entonces los números  $a_1 x, a_2 x, a_3 x, a_4 x, \dots$  donde  $x$  es un número cualquiera, también están en progresión geométrica. Halla la razón.
- 60.- Una vieja comunica un secreto a tres amigas. Diez minutos después el secreto es comunicado por cada una de ellas a otras tres. A su vez cada una de las nuevas poseedoras del secreto se lo comunica a otras tres y así, sucesivamente. ¿Cuántas personas conocen el secreto al cabo de cuatro horas?
- 61.- Halla la fracción generatriz de los siguientes números:
- 1'222...
  - 16'272727...
- 62.- Calcula las siguientes sumas:
- $2 + 0'42 + 0'0042 + 0'000042 + \dots$
  - $4 - 0'4 + 0'04 - 0'004 + 0'0004 - \dots$